

**Всероссийская студенческая олимпиада  
по математике**

(для студентов технических вузов)

**Южно-Российский государственный технический университет  
(Новочеркасский политехнический институт)**

**г. Новочеркасск**

**Задача 1 (10 б).** Существует ли целочисленная матрица размера  $3 \times 3$  с определителем, равным 1, все элементы которой по абсолютной величине больше 1000 ?

**Задача 2 (20 б).** Решить систему дифференциальных уравнений  
$$\begin{cases} y' = y^2 + z, \\ z' = z^2 + y \end{cases}$$
 с начальными условиями  $y(0) = 1, z(0) = 1$ .

**Задача 3 (15 б).** Существует ли в трехмерном пространстве треугольник с площадью  $\sqrt{3}$ , вершины которого имеют целочисленные координаты?

**Задача 4 (15 б).** Известно, что функция  $y(x) = e^{(1 - \sqrt[3]{2})x}$  является решением линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными и целыми коэффициентами. Найти хотя бы одно такое уравнение.

**Задача 5 (15 б).** Изобразить множество точек на плоскости, координаты  $x, y$  которых удовлетворяют соотношению  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - |y|^n}{x^{2n} + |y|^n} < 0$ .

**Задача 6 (10 б).** Докажите, что положительный корень уравнения  $x(x+1)\dots(x+n) = 1$  меньше, чем  $\frac{1}{n!}$ .

**Задача 7 (15 б).** Найти непрерывную кусочно-гладкую функцию, для которой интеграл  $\int_{-3}^3 \sqrt{1 + (y')^2} dx$  принимает минимальное значение, если:  
 $y(-3) = y(3) = 0, y(x) \geq 1$  при  $-1 \leq x \leq 1$ .